Institut la centrale Analyse 2 ①

Fonctions à plusieurs variables

1/ limite - Continuité

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in V_{x_0} : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

- f continue en $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Calcul de limite

  * Si $|f(x,y) - \ell| \leq g(x,y)$ et $\lim g(x,y) = 0$ alors $\lim f(x,y) = \ell$

  * On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad (x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$

  $$|f(x,y)| = |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq g(r)$$

- Si f, g sont continues sur Ω alors de même $f+g$ et df

2/ Différentiabilité

- f est différentiable en $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \iff \exists$ une application linéaire notée $L_{x_0} = df_{x_0}$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) + \varepsilon_{x_0}(x - x_0)\,\|x - x_0\|$$

où $\varepsilon_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{x_0}(x - x_0) = 0$

(Autre expression : $f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + \varepsilon_{x_0}(h)\,\|h\|$ et $\lim_{h \to 0} \varepsilon_{x_0}(h) = 0$)

- f est différentiable dans $\Omega \iff f$ est différentiable en tout point de Ω

- Approximation : au voisinage de x_0 : $f(x) \simeq f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0)$

- Si f est différentiable au point x_0 alors f est continue en x_0

3/ Dérivées partielles

a/ D'ordre 1 : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

b/ Derivées partielle d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

c/ Proposition : Si f est differentiable au point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors f admet des derivées partielles par rapport à chacune des x_i

d/ Theoreme : Si f admet des derivées partielles continues en x_0 alors f est differentiable en x_0 (la réciproque est fausse)

e/ Fonction de classe C^1 :

On dit que f est continûment differentiable (ou de classe C^1) dans Ω si elle admet en chaque point de Ω des derivées partielles continues.

f/ Theoreme de Schwarz

Si f admet des derivées partielles seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues en $(x_0, y_0) \in \Omega$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

g/ Differentielle de f : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

l'expression : $df_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$ s'appelle differentielle de f

* Differentielle de la composée :

Si $z = f(x,y)$ où $x = \varphi(u,v)$ et $y = \psi(u,v)$ alors

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{et} \quad dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

h/ Theoreme des accroissements finis

Soit f une fonction numerique differentiable dans Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\forall a \in \Omega,\ \forall a+h \in \Omega$: $\exists\, \theta \in]0,1[$ telque

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) \quad \text{où } h = (h_1, \dots, h_n)$$

i/ Formule de Taylor à l'ordre 3 au voisinage de (x_0,y_0) (2)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x_0,y_0) + \frac{1}{3!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)}_{(x_0+\theta(x-x_0)\,;\,y_0+\theta(y-y_0))}$$

$0<\theta<1$

j/ Formule de Mac-Laurin à l'ordre 3 au voisinage de $(0,0)$

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] f(0,0) + \frac{1}{2!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(0,0) + \frac{1}{3!}\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)} f(\theta x, \theta y) \qquad 0<\theta<1$$

4/ Application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$
  $x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \longrightarrow f(x) = (f_1(x),\dots,f_p(x))$
- $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto p_i(x) = x_i$

alors $f_i = p_i \circ f \; ; 1 \le i \le p$

a/ Continuité : f est continue en $x_0 \in \Omega \iff f_i$ est continue en x_0 $\forall i$

b/ Différentiabilité : f est différentiable en $x \in \Omega \iff f_i$ est différentiable en x $\forall i$

c/ Classe C^q : f est de classe $C^q_{q\ge 1}$ sur $\Omega \iff f_i$ est de classe C^q sur Ω $\forall i$

d/ Dérivation de fonctions composées

si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$ et

alors $g\circ f$ est différentiable en a

$$\frac{\partial\, g\circ f}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$$

e/ Matrice jacobienne de f au point x_0 :

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Jacobien de f en x_0 (qd $n=p$)

$$\det Jf(x_0) = \frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}$$

2 exemples usuelles

- $f : [0,+\infty[\times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(r,\theta) \longrightarrow (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad \det Jf = r$

- $f : [0,+\infty[\times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$(r,\theta,\varphi) \longrightarrow (x,y,z) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$
$\det J\varphi = r^2\cos\varphi$

5/ Extremum local

a/ Definition : f admet un minimum (maximum) local au point a
$\Leftrightarrow$ $\exists$ un voisinage V de a telque $\forall x \in V$: $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) \leq f(a))$

b/ Condition necessaire (d'existence)

f fonction definie sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ differentiable en a
si f admet un extremum en a alors $df_a = 0$ cad $\forall i : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$
les points qui annulent les derivées partielles s'appellent : points stationnaires

c/ Condition suffisante (Cas $n=2$)

Matrice hessienne $\quad H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ $\quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$
$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$

$$D = \det H = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2$$

Alors : si $D < 0$ alors (x_0,y_0) n'est pas extremum
si $D > 0$ et $r < 0$ ou $t < 0$ alors (x_0,y_0) maximum
si $D > 0$ et $r > 0$ ou $t > 0$ alors (x_0,y_0) minimum
si $D = 0$, on ne peut pas conclure

6/ Theoreme des fonctions implicites $(n=2)$

$(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, f de classe C^1 sur un voisinage de (x_0,y_0)
telle que $f(x_0,y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$
Alors $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ / $\forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ l'equation $f(x,y)=0$
admet une unique solution $y = \varphi(x)$ dans $]y_0-\beta, y_0+\beta[$
φ est de C^1 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ $\quad \forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$

Methode de calcule de limite

M1 : Si $|f(x,y) - \ell| \leqslant g(x,y)$

et si $\lim\limits_{(0,0)} g(x,y) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)} f = \ell$

M2 : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad |f(x,y) - \ell| \leqslant g(r)$

si $\lim\limits_{r \to 0} g(r) = 0$ alors $\lim\limits_{(0,0)} f = \ell$

M3 : Pour montrer qu'une limite n'existe pas il suffit de choisir 2 courbes (directions) qui donnent 2 limites differentes